

Konveksnost - nekaj nalog

1. Za vsak $x \in \mathbb{R}^n$ naj bo $\bar{x} = (x, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dokaži, da so vektorji $v_1, \dots, v_k$ iz $\mathbb{R}^n$ afino neodvisni natanko takrat, kadar so vektorji $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ iz $\mathbb{R}^{n+1}$ linearno neodvisni.
2. Naj bo P afini podprostor v $\mathbb{R}^n$, ki seka hiperravnino $H \subseteq \mathbb{R}^n$, vendar ni vsebovan v njej. Pokaži, da potem velja enakost

$$\dim(P \cap H) = \dim P - 1.$$

3. Naj bosta U_1 in U_2 vektorska podprostora v realnem vektorskem prostoru V in $v_1, v_2 \in V$. Afina podprostora $A_1 = U_1 + v_1$ in $A_2 = U_2 + v_2$ sta *vzporedna*, kadar je $U_1 \subseteq U_2$ ali $U_2 \subseteq U_1$, in *komplementarna*, kadar sta U_1 in U_2 komplementarna (torej $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^n$). Dokaži, da veljata naslednji trditvi:
 - (a) Če nobeden od dveh vzporednih afinih podprostorov ni vsebovan v drugem, potem nimata nobene skupne točke.
 - (b) Komplementarna afina podprostora se sekata natanko v eni točki.
4. Dokaži naslednje trditve:
 - (a) Vsota konveksnih podmnožic vektorskega prostora je konveksna množica.
 - (b) Konveksna ogrinjača vsote nepraznih podmnožic vektorskega prostora je vsota njihovih konveksnih ogrinjač.
 - (c) Konveksna ogrinjača unije dveh konveksnih podmnožic danega vektorskega prostora je unija zaprtih intervalov, ki imajo eno od krajišč v eni od obeh množic, drugo pa v drugi.
5. Dokaži, da sta notranjost in zaprtje konveksne podmnožice v $\mathbb{R}^n$ konveksni množici.
6. Za vsako neprazno podmnožico $M \subseteq \mathbb{R}^n$ naj bo njena *polara* množica

$$M^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall y \in M\}.$$

Dokaži, da so polare konveksne in da veljata naslednji trditvi:

- (a) Polara množice se ujema s polaro njene konveksne ogrinjače, $M^\circ = (\text{conv} M)^\circ$;
- (b) Polara M° je stožec natanko takrat, kadar velja

$$M^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in M\}.$$

7. Naj bo B_p zaprta enotska krogla $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ za p -to normo

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p.$$

Dokaži, da je za $n > 1$ krogla B_1 politop, krogla B_2 pa ne.

8. Naj bo K neprazna konveksna podmnožica normiranega prostora V . Dokaži, da je množica

$$K_r = \{x \in V : \exists y \in K \ni \|x - y\| < r\}$$

za vsak $r > 0$ konveksna (okolica množice K).

9. Naj bo M podmnožica realnega vektorskega prostora V , $x, y \in V$, $x \neq y$ pa točki, za kateri velja

$$x \in \text{conv}(M \cup \{y\}), \quad y \in \text{conv}(M \cup \{x\}).$$

Dokaži, da točki x in y ležita v $\text{conv}M$.

10. Naj bo M podmnožica realnega vektorskega prostora V . Dokaži, da je množica vseh elementov $x \in M$, za katere je $[x, y] \subseteq M$ za vsak $y \in M$, konveksna.
11. Naj bo $S = \text{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ simpleks, kjer so elementi $x_1, \dots, x_m$ afino neodvisni. Dokaži, da so množice $S \setminus \{x_j\}$, $j = 1, \dots, m$, konveksne.
12. Oglišče politopa $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ je po definiciji vsaka točka x_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, za katero je množica $S \setminus \{x_j\}$ konveksna. Dokaži, da je politop konveksna ogrinjača svojih oglišč.
13. Dokaži, da je množica

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y + 2z \leq 12, 0 \leq z \leq 3\}$$

politop in izrazi $(1, 2, 2)$ kot konveksno kombinacijo njegovih oglišč.

14. Poišči vse konveksne podmnožice ravnine (oziroma prostora $\mathbb{R}^n$), ki imajo konveksen komplement.
15. Dokaži, da je vsaka podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^2$ s premerom 1 vsebovana v krogu s polmerom $\sqrt{3}/3$.
16. Naj bo M omejena podmnožica normiranega prostora. Dokaži, da imata M in $\text{conv}M$ enak premer.
17. Vsaki dve množici dane končne družine konveksnih podmnožic ravnine se sekata. Dokaži, da obstaja neskončno premic, ki sekajo vse množice te družine.
18. Na ravnini je dana taka končna družina med sabo vzporednih omejenih zaprtih intervalov, da za vsake tri intervale obstaja premica, ki seka vse tri. Dokaži, da obstaja premica, ki seka vse intervale te družine.
19. Dokaži, da je vsak element iz konične ogrinjače neprazne podmnožice $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konična kombinacija n elementov iz množice M .

20. V prostoru $\mathbb{R}^n$ so dane točke $x_1, \dots, x_m$. Dokaži, da je množica vseh točk $x \in \mathbb{R}^n$, za katere velja $\|x - x_1\| = \min\{\|x - x_j\| : j \in \{1, \dots, m\}\}$, konveksna.
21. Dokaži, da je konveksna ogrinjača odprte podmnožice normiranega prostora odprta.
22. Dokaži, da konveksna ogrinjača zaprte podmnožice ravnine $\mathbb{R}^2$ ni nujno zaprta.
23. Naj bosta K in K_1 konveksni podmnožici prostora $\mathbb{R}^n$ z enakim zaprtjem. Dokaži, da velja $\text{rel int} K \subseteq K_1 \subseteq \overline{K}$.
24. Naj bo K zaprta konveksna podmnožica $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje poltrak $x + \mathbb{R}^+v$. Dokaži, da potem K vsebuje vsak poltrak $y + \mathbb{R}^+v$, $y \in K$.
25. Dokaži, da je množica $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$ konveksna in poišči vse poltrake, ki jih vsebuje K .
26. Naj bo K kompaktna konveksna podmnožica $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da za vsako hiperravnino v $\mathbb{R}^n$ obstaja vzporedna nosilna hiperravnina množice K .
27. Dokaži, da je presek vseh zaprtih polprostorov, ki vsebujejo dano podmnožico prostora $\mathbb{R}^n$ enak zaprti konveksni ogrinjači te množice.
28. Naj bo K kompaktna konveksna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$, ki ne vsebuje točke 0. Dokaži, da je stožec $C = \text{cone } K$ zaprt in ustreza pogoju $C \cap (-C) = \{0\}$.
29. Naj bo K zaprt stožec v $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da je vsako neprazno lice stožca K stožec.
30. Dokaži, da zaprt stožec, ki vsebuje premico, nima ima ekstremnih točk.
31. Naj bo K zaprta konveksna podmnožica $\mathbb{R}^n$ in $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ injektivna afina preslikava. Dokaži, da je potem $A(\text{ext} K) \subseteq \text{ext } A(K)$.
32. Naj bosta F in G izpostavljeni lici zaprte konveksne podmnožice K prostora $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da je $K \cap G$ izpostavljeno lice množice K .
33. Dokaži, da je $C = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}\}$ zaprt konveksen stožec v $\mathbb{R}^n$ in poišči njegove nosilne hiperravnine ter njegova lica.
34. Poišči ekstremne točke preseka zaprte enotske krogle v $\mathbb{R}^n$ s polprostorom $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ ter nosilne hiperravnine tega preseka v točki $(0, \dots, 0, 1)$.
35. Poišči tako kompaktno podmnožico K ravnine, da množica njenih izpostavljenih točk $\text{exp} K$ ni zaprta in da $\text{conv}(\text{exp} K) \neq K$.
36. Naj bo S množica vseh realnih pozitivno semidefinitnih $n \times n$ matrik v prostoru $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dokaži, da je S zaprt konveksen stožec, ki ne vsebuje nobene premice. Poišči afino ogrinjačo stožca S in dokaži, da njegovo relativno notranjost sestavljajo pozitivno definitne matrike.

37. Poišči tri vektorje, katerih konična ogrinjača je poliedrski stožec

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z \leq 0, 2x - y + z \leq 0, z \geq 0\}.$$

Poišči tudi generatorje ter poliedrski zapis polarnega stožca P° .

38. Naj bo K zaprta konveksna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$ in $a \in K$. Dokaži, da je tangentni stožec množice K v točki a enak zaprtju množice $\mathbb{R}^+(K - a)$.

39. V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dan polieder

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x + y + z \geq 2\}.$$

Dokaži, da je njegov asimptotični stožec polieder in ga poišči. Dokaži, da je tudi njegov tangentni stožec v točki $(1, 0, 1)$ polieder in ga poišči.

40. Polieder P lahko zapišemo kot vsoto $P = K + C$, kjer je K politop, C pa poliedrski stožec. Dokaži, da je C asimptotični stožec poliedra P .

41. Pri katerih pogojih za realna parametra a in b je funkcija $f(x, y) = ax + by$ navzdol omejena na območju

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x + y \geq 4, x - 2y + 2 \leq 0\}$$

in kolikšna je tedaj njena minimalna vrednost na P ?

42. Naj bo K kompaktna podmnožica $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da je funkcija

$$f(x) = \sup_{y \in K} \langle x, y \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

konveksna na $\mathbb{R}^n$.

43. Naj bo C konveksen stožec prostora $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da je pozitivno homogena funkcija $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(\lambda x) = \lambda f(x)$ za vsak $x \in C$ in vsak $\lambda \geq 0$) konveksna natanko takrat, kadar je subaditivna ($f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ za vsak $x, y \in C$).

44. Pri katerih vrednostih parametrov $a, b \in \mathbb{R}$ je funkcija $f(x, y) = -x^a y^b$ konveksna na območju $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$?

45. Poišči maksimalna območja konveksnosti funkcije $f(x, y) = x^2(a + e^y)$ v odvisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$.

46. Ali je funkcija $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$ konveksna na kaki konveksni podmnožici $D \subseteq \mathbb{R}^2$ z neprazno notranjostjo $\text{int} D$?

47. Naj bo funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna in dvakrat odvedljiva. Dokaži, da je potem konveksna tudi funkcija $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dana s predpisom $g(x) = xf(\frac{1}{x})$. Ali je g konveksna tudi brez predpostavke o dvakratni odvedljivosti funkcije f ?

48. Dokaži, da je funkcija $f(x, y) = |x - y|$ konveksna na $\mathbb{R}^2$ in poišči njen subdiferencial v točki $(0, 0)$.
49. Dokaži, da je subdiferencial evklidske norme $f(x) = \|x\|$ prostora $\mathbb{R}^n$ v 0 enak zaprti enotski krogli: $\partial f(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.
50. Naj bo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija, K pa kompaktna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da obstaja taka ekstremna točka a množice K , da f v njej doseže največjo vrednost na K , torej $f(a) = \max\{f(x) : x \in K\}$.